

**Открытая олимпиада  
Север-Кавказского федерального университета среди  
обучающихся образовательных организаций «45 параллель»**

ПО математике

Дата проведения 7 апреля 2024

ФИО участника (полностью) Бабаян Роберт Артурович

Дата рождения 21 апреля 2007

Класс 11

Школа № 20 район Тарнонская город Михайловск

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

*предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.*

**Оформление работы**

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

**Правила поведения**

Участник очного тура олимпиады **обязан:**

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

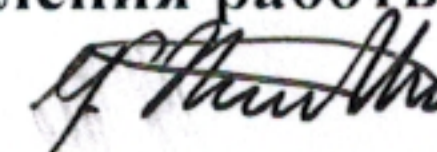
Участнику олимпиады **запрещается:**

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени,

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен



(подпись участника олимпиады)

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

1. Количество детей  $\rightarrow a$ , количество семейных пар  $\rightarrow b$   
 Посмотрим, сколькими способами можно выбрать тройку победителей.

Изначально мы выберем ребёнка.

Есть  $a$  детей, т.е. можно сделать выбор  $a$  способами.

После этого выберем маму. Мы не можем выбрать маму из только из одной семьи — семьи ребёнка, которого мы выбрали первым, т.е.  $(b-1)$  способами.

И наконец выберем папу. Уже количество семей, доступных для выбора — 2, т.е.  $(b-2)$  способа выбора. Получается:

$$a(b-1)(b-2) = 3630 \quad (1)$$

Разделим на простые множители наше число:

$$3630 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 \quad (2)$$

Так как  $a$  и  $b \in \mathbb{Z}$ , следовательно наши множители из уравнения (1) могут равняться только этим цифрам или цифрам, полученным их комбинациями (умножая их попарно или даже ~~во~~ более двух)

Видим, что  $(b-1)$  и  $(b-2)$  последовательные цифры. Эта пара может соответствовать паре:

$$(2, 3) \text{ или } (10, 11)$$

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

$$2, 3) \quad b-1=23, \quad b-2=2 \quad b=4, \quad a = \frac{3630}{3 \cdot 2} = 605$$

Птак как в задаче отменяют, что каждая семья имеет не более 10 детей, то:

$$a_{\max} = b \cdot 10 = 40 \quad a > a_{\max} \Rightarrow \text{не подходит.}$$

$$10, 11) \quad b-1=11, \quad b-2=10 \quad b=12, \quad a = \frac{3630}{11 \cdot 10} = 33$$

$$a_{\max} = b \cdot 10 = 120, \quad a < a_{\max} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Ответ подходит,  $a = 33$   
100

$$3. \quad \begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12 \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144 \end{cases}$$

$$\text{д.г.з. } y - 3x \geq 0$$

~~$\sqrt{y-3x}$~~   $\sqrt{y-3x}$  отменим как  $t$

$$\begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ y^2 - 9x^2 + t^2 = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ (y - 3x)(y + 3x) + t^2 = 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ t^2(12 - t) + t^2 = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ t^2(12 - t + 1) = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ t^2(13 - t) = 144 \end{cases}$$

$$13t^2 - t^3 - 144 = 0, \quad t^3 - 13t^2 + 144 = 0, \quad (t - 12)(t^2 - t - 12) = 0$$

$$\begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ t - 12 = 0 \\ t^2 - t - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ t = 12 \\ (t + 3)(t - 4) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x = 12 - t \\ t = 12 \\ t = 4 \quad t \neq \\ t = -8 \quad (t \geq 0 \Rightarrow \text{не пох.}) \end{cases}$$

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

$$\begin{cases} y + 3x = 0 \\ (y - 3x)(y + 3x + 1) = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x = 0 \\ y - 3x = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 144 \\ 3x = y - 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3x = 8 \\ (y - 3x)(y + 3x + 1) = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x = 8 \\ y - 3x = \frac{144 - 16}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 24 \\ 3x = y - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 72 \\ x = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Проверим О.г.з.

1)  $y - 3x = 144 \quad \checkmark$

2)  $y - 3x = 16 \quad \checkmark$

ответственно:  $(-24; 72)$  и  $(-\frac{4}{3}; 12)$

4.  $\frac{\sin x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} \frac{\cos x}{x^2+1} > 0$

$\frac{x}{x^2+1}$  отменим как  $a$

О.г.з.  $x^2+1 \neq 0 \quad | \Rightarrow x \neq 0$

$x \in \mathbb{R}$

$$\sin a + \frac{1}{a} \cos a > 0$$

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \sin a + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cos a \right) > 0$$

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} (\cos \varphi \sin a + \sin \varphi \cos a) > 0$$

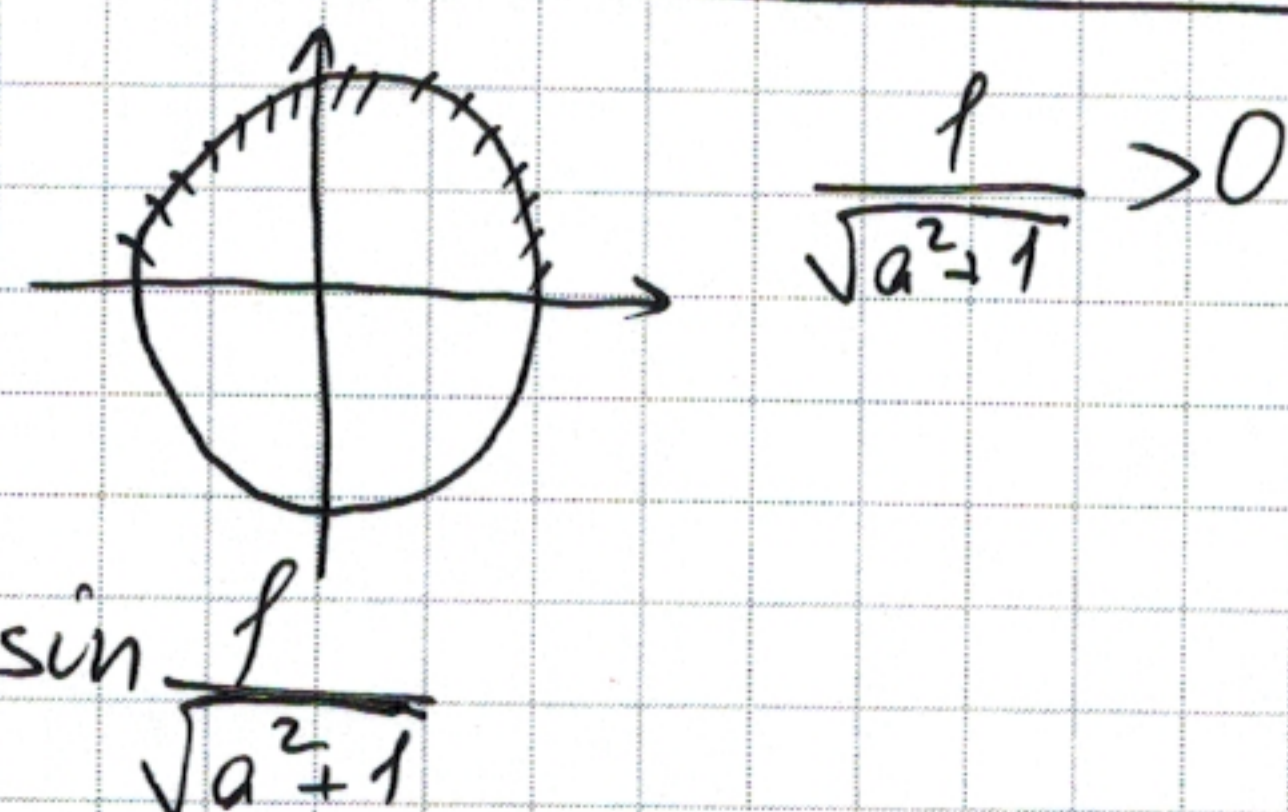
$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} (\sin(a+\varphi)) > 0$$

$$\sin(a+\varphi) = 0 \quad \left( \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \right)$$

$$a = \pi k - \varphi \quad \varphi \in (2\pi k; 2\pi k + \pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in (2\pi k; 2\pi k + \pi); \quad a = \pi k - \arcsin \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

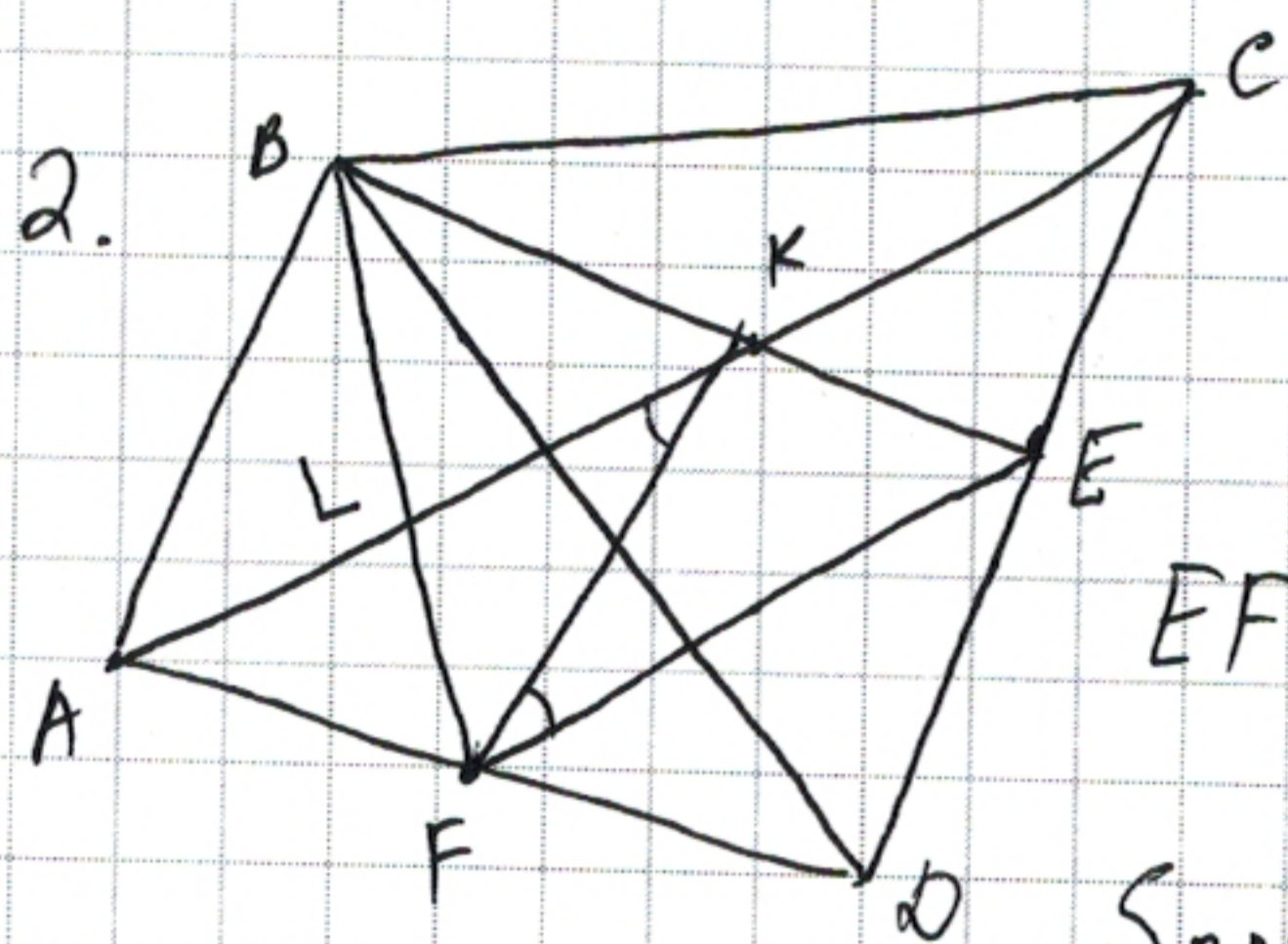
Мы вывели за скобки именно этот коэффициент, т.к.  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 = 1$  и можем их заменить на  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

$$\frac{\sqrt{a^2+1} \cdot (\sin(a+\varphi))}{a} > 0$$

05



$$S_{ABCD} = 2024$$

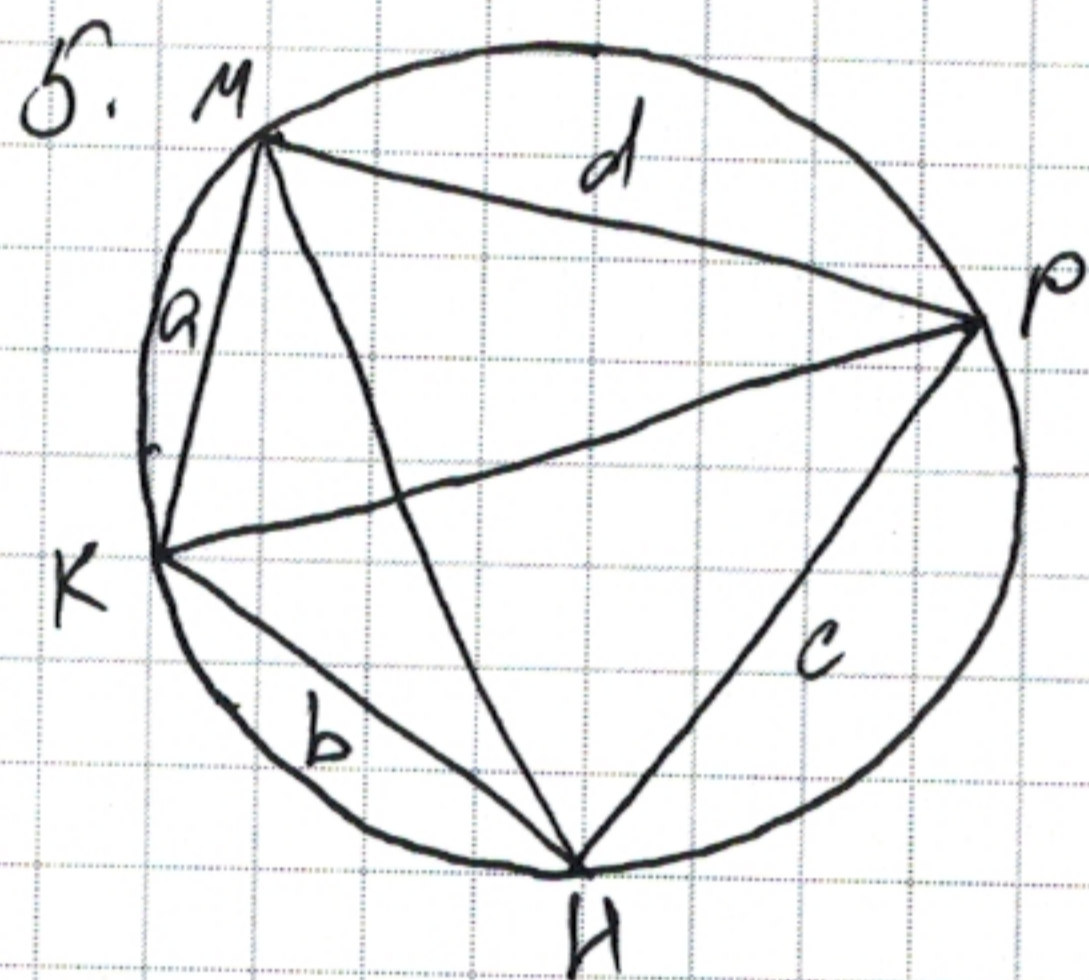
EF средняя линия в  $\triangle DAC \Rightarrow EF \parallel AC$  и

$$EF = \frac{AC}{2} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{S_{DAC}}{4} \text{ и } \angle EFK = \angle FKL$$

$$S_{BAF} = S_{BDF}, S_{BCE} = S_{BDE}$$

$$S_{BEFD} = \frac{S_{ABCD}}{2} = ?$$

05



$$\frac{\sin M}{\sin K} = \frac{MN}{KN} = 2R, \frac{KN}{\sin M} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin K}{\sin M} = \frac{KN}{MN} \cdot \frac{MN}{KN} \cdot \frac{MN}{KN} \quad (\angle M + \angle N = 180^\circ)$$

$$\cos M = -\cos N, \cos M + \cos N = 0$$

$$\frac{a^2+d^2-KN^2}{2ad} + \frac{b^2+c^2-KN^2}{2bc} = 0 \quad (\text{т.к. можно описать окруж.})$$

$$\frac{(a^2+d^2)bc + (b^2+c^2)ad - KN^2(ad+bc)}{abcd} = 0$$

$$KN^2 = \frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad+bc}$$

$$MN^2 = \frac{a^2de + b^2de + d^2ab + c^2ab}{ab+dc}$$

$$\frac{KN^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{KN^2} = \frac{ab+dc}{ad+bc} \cdot \frac{ad+bc}{ab+cd} \left( \frac{a^2de + b^2de + d^2ab + c^2ab}{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad} \right) =$$

$$= \frac{ad+bc}{ab+cd} \left( \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)(ac+bd)} \right) = \frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2} \Rightarrow \frac{\sin K}{\sin M} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

105