

**Открытая олимпиада  
Север-Кавказского федерального университета среди  
обучающихся образовательных организаций «45 параллель»**

ПО математике

Дата проведения 07.04.2024г.

ФИО участника (полностью) Ашикеева Александра Ивановича

Дата рождения 22.09.2006г.

Класс 11

Школа № СУНЦ СКФУ

район \_\_\_\_\_

город Ставрополь

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

*предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.*

**Оформление работы**

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

**Правила поведения**

Участник очного тура олимпиады **обязан:**

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

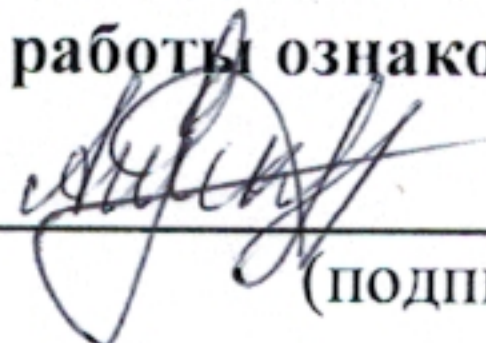
Участнику олимпиады **запрещается:**

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени,

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен



(подпись участника олимпиады)

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

№ 11.3

$$\begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12 \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x + \sqrt{y-3x} = 12 \\ y^2 - 9x^2 + y - 3x = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x + \sqrt{y-3x} = 12 \\ (y+3x)(y-3x) + y - 3x \end{cases}$$

Пусть  $\sqrt{y-3x} = t, t \geq 0$ ;  $y+3x = m$ , тогда система примет вид:

$$\begin{cases} m + t = 12 \\ t^2 m + t^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 - t \\ t^2(12 - t) + t^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 - t \\ t^3 - 13t^2 + 144 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 - t \\ (t+3)(t-4)(t-12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 - t \\ \begin{cases} t = -3 \text{ не удовн. } t \geq 0 \\ t = 4 \\ t = 12 \end{cases} \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной  $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} t = 4 \\ m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-3x} = 4 \\ y + 3x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3x = 16 \\ y = 8 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 12 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-3x} = 12 \\ y + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3x = 144 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 - 3x - 3x = 16 \\ y = 8 - 3x \\ -3x - 3x = 144 \\ y = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x = 8 \\ y = 8 - 3x \\ -6x = 144 \\ y = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = 12 \\ x = -24 \\ y = 72 \end{cases}$$

Решением данной системы являются точки  $(-\frac{4}{3}; 12)$  и  $(-24; 72)$

Ответ:  $(-\frac{4}{3}; 12), (-24; 72)$

100

№ 11.4.

$$\sin \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} \cos \frac{x}{x^2+1} > 0$$

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

Пусть  $\frac{x}{x^2+1} = t$ , тогда  $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{t}$ ,  $t \neq 0$   
 $\sin t + \frac{1}{t} \cos t > 0$

Заметим, что при  $x > 0$   $t$  принимает положительные значения. В этом случае  $\sin t > 0$ ,  $\cos t > 0$ ,  $\frac{1}{t} > 0$  ~~следовательно~~  
~~то~~ ( $t$  будет принимать такие значения, что там где ~~будет~~ ~~меньше~~ меньше моменты, следовательно  $\sin t$  и  $\cos t$  будут принадлежать I координатной четверти), следовательно ~~правая~~ левая часть неравенства в этом случае всегда будет представлять собой сумму двух положительных чисел, что больше нуля и неравенство всегда будет верным.

При  $x < 0$   $t$  принимает отрицательные значения. В этом случае  $\sin t < 0$  (т.к.  $\sin(-x) = -\sin x$ ),  $\cos t > 0$ ,  $\frac{1}{t} < 0$ , следовательно левая часть неравенства представляет собой сумму отрицательного числа и произведения отрицательного числа на положительное число, которое также отрицательно, а значит левая часть неравенства в этом случае всегда отрицательна и неравенство является неверным, т.к. отрицательное число не может быть больше ~~положительного~~ нуля.

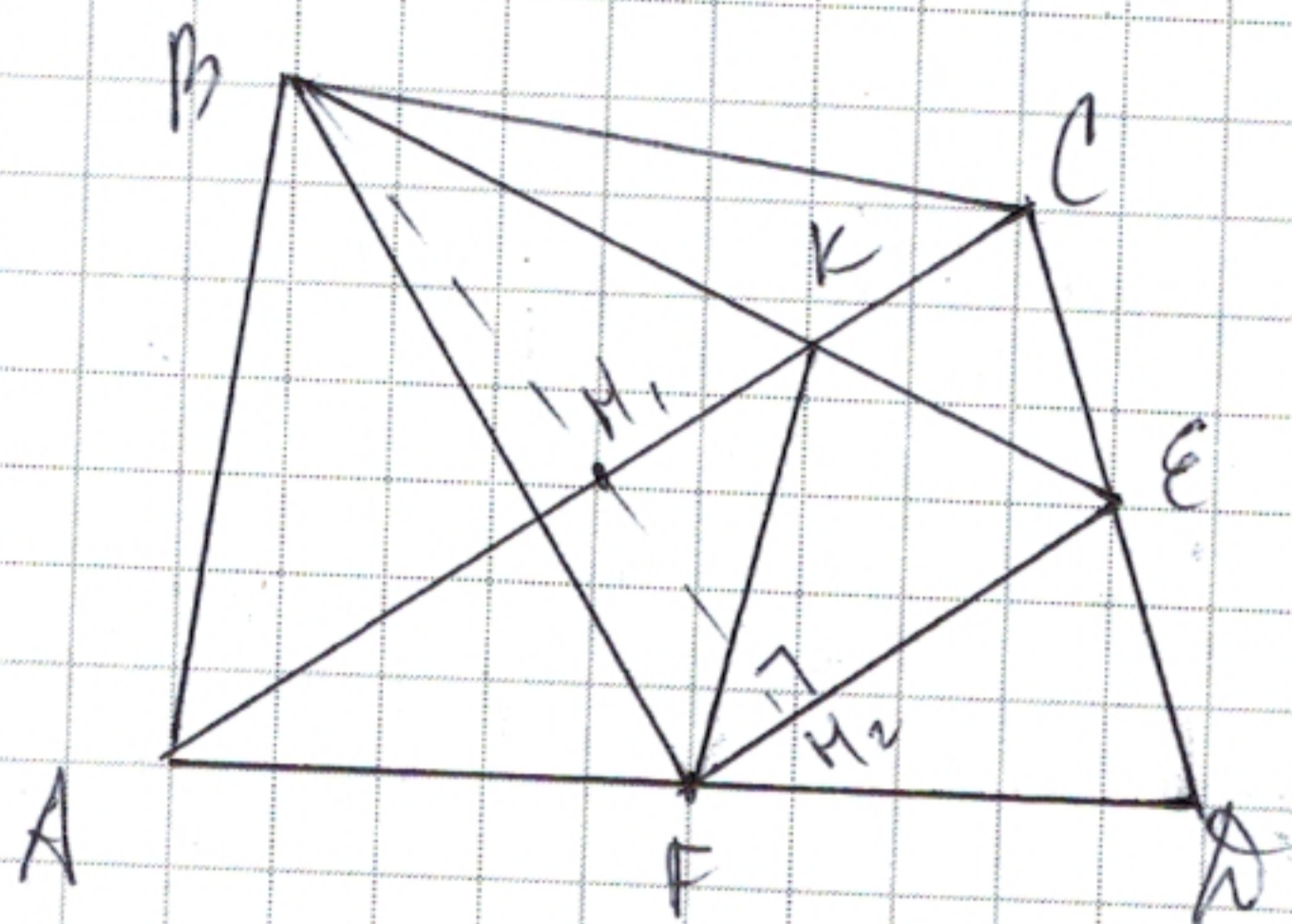
Некоторые из данных рассуждений, ответом будет являться промежуток  $x \in (0; +\infty)$

Ответ:  $x \in (0; +\infty)$

100

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

№11.2



Дано:  $\triangle ABC$  - выпуклый четырехугольник,  $E$  - середина  $AC$ ,  $F$  - середина  $AB$   
 $AE \cap BE = K$ ,  $S_{\triangle ABE} = 2024$   
 Найти:  $S_{\triangle KFB} = ?$

Решение:

Рассмотрим  $\triangle BEF$  и  $\triangle KFB$ , они имеют общую высоту и равные основания, а значит их площади относятся друг к другу как относятся друг к другу их основания.

$$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle KFB}} = \frac{BE}{BK} \quad (1)$$

Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle BEF$ , проведем из вершины  $B$  к стороне  $FE$  высоту, которая будет пересекать  $AC$  в точке  $H_1$ , а  $FE$  в точке  $H_2$ , тогда площади треугольников будут относиться друг к другу как отношение произведений их высот на их основания:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{BH_1 \cdot AC}{BH_2 \cdot FE}, \text{ т.к. } BE, FE - \text{средние линии в } \triangle ABC, \text{ то } FE = \frac{1}{2} AC$$

Рассмотрим  $\triangle BH_2E$ , т.к.  $AC \parallel FC$  (как основание и среднее линия  $\triangle ABC$ ), то по теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{BH_1}{BH_2} = \frac{BK}{BE}, \text{ тогда}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{BH_1 \cdot AC}{BH_2 \cdot FE} = \frac{BK \cdot 2FE}{BE \cdot FE} = \frac{2BK}{BE}, \quad S_{\triangle BEF} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot BE}{2BK}$$

подставим в выражении (1), получим:

$$\frac{S_{\triangle ABC} \cdot BE}{2BK \cdot S_{\triangle KFB}} = \frac{BE}{BK}, \quad 2S_{\triangle KFB} = 1, \quad 2S_{\triangle KFB} = S_{\triangle ABC}$$

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

$$2S_{\Delta KFB} = 2024$$

$$S_{\Delta KFB} = 1012$$

Ответ: 1012

105

п.1.1.

Пусть на спортивные соревнования пришло  $x$  детей и  $y$  супружеских пар, тогда маму-призеру можно выбрать из  $(y-1)$  супружеских пар, а папу-призера, при соблюдении условия, что все они из разных семей, из  $(y-2)$  супружеских пар.

Тогда кол-во способов выбрать тройку призеров равно:

$$x(y-1)(y-2) = 3630$$

Получается, что среди множителей числа 3630 необходимо подобрать 2 таких, чтобы они отличались друг от друга на 1.

$$3630 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2, \text{ наибольшими парами являются } 5 \text{ и } 6 \text{ или } 10 \text{ и } 11$$

1) при случай, когда этими множителями являются 5 и 6, тогда:

$$y-1 = 6$$

$$y-2 = 5$$

тогда кол-во супружеских пар равно 7, тогда кол-во детей равно  $11^2 = 121$ , но это противоречит тому, что в каждой семье не более 10 детей, а значит данный вариант нам не подходит.

2) при случай, когда  $y-1 = 11$ ,  $y-2 = 10$ , тогда еще кол-во супружеских пар равно 12, а кол-во детей равно  $3 \cdot 11 = 33$ , такой случай удовлетворяет условию

Шифр \_\_\_\_\_

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы ответов скрепить!

о максимальном количестве решений в смысле  
 исхода у вышесказанной расстановки, помня, что на  
 площадке было 33 ребенка.  
 Ответ: 33

100