

9 класс

Условие задачи 9.1.

Дано некоторое двузначное число. Света приписала к этому числу справа цифру 8, а Лена приписала к этому числу слева цифру 3. Трехзначное число, полученное Светой, оказалось вдвое больше трехзначного числа, полученного Леной. Какое двузначное число изначально было дано?

Решение. Пусть задумано число $\overline{xy} = 10x + y$.

Число Светы: $\overline{xy8} = 100x + 10y + 8$

Число Лены: $\overline{3xy} = 300 + 10x + y$

По условию: $100x + 10y + 8 = 2(300 + 10x + y)$

$$100x + 10y + 8 = 600 + 20x + 2y$$

$$80x + 8y = 592 \quad | :8$$

$$10x + y = 74$$

$$\overline{xy} = 74$$

Ответ: 74.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное верное решение.
18	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
15	Ход решения задачи верный. Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
5	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца,
1	Есть продвижение в решении задачи,
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует. Есть правильный ответ без решения.

Условие задачи 9.2.

Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=15$

Решение.

$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=15$$

$$(x^2+x+4x+4)(x^2+2x+3x+6)=15$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=15$$

Пусть $y = x^2 + 5x$. Тогда получим уравнение

$$(y+4)(y+6)-15=0$$

$$y^2+6y+4y+24-15=0$$

$$y^2+10y+9=0$$

$$y=-1 \quad \text{или} \quad y=-9$$

Вернемся к прежней переменной:

$$x^2+5x=-1 \quad \text{или} \quad x^2+5x=-9$$

$$x^2+5x+1=0 \quad \quad \quad x^2+5x+9=0$$

$$D=25-4=21 \quad \quad \quad D=25-36<0$$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \quad \quad \quad \text{Действительных корней нет}$$

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \quad \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \quad \frac{7-\sqrt{11}}{2} \quad \frac{7+\sqrt{11}}{2}$$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное верное решение.
19	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
158	Решение содержит незначительные арифметические ошибки, возникшие при решении уравнений относительно переменной x , после возвращения к прежней переменной.
15	Ход решения задачи верный. Правильно осуществлена замена переменной, найдены значения новой переменной.

	Найдены не все значения переменной x .
5	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца.
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует. Есть правильный ответ без решения.

Условие задачи 9.3.

Георгий, Святослав, Алексей и Тимофей решили организовать свою фирму. Георгий вложил в уставной капитал 520 тысяч рублей. Доля Святослава составила половину от общей суммы капитала без учета собственных вложенных средств, доля Алексея составила $\frac{100}{3}\%$ от общей суммы капитала без учета собственных вложенных средств, а доля Тимофея составила двадцать пять процентов всего капитала без учета собственных вложенных средств. Сколько вложил в общее дело каждый из учредителей: Святослав, Алексей и Тимофей?

Решение. Обозначим суммы вложений: Алексей – x тысяч рублей, Тимофей – y тысяч рублей, Святослав – z тысяч рублей.

По условию задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(520 + y + z) \cdot \frac{100}{3}}{100} \\ y = \frac{(520 + x + z) \cdot 25}{100} \\ z = \frac{(520 + y + x)}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = 520 + y + z \\ 4y = 520 + x + z \\ 2z = 520 + x + y \end{array} \right.$$

Если вычесть из второго уравнения системы третье, то получим

$$4y - 2z = z - y \Rightarrow y = \frac{3z}{5}$$

Если вычесть из первого уравнения системы третье, то получим

$$3x - 2z = z - x \Rightarrow x = \frac{3z}{4}$$

Первое уравнение системы примет вид:

$$3 \cdot \frac{3z}{4} = 520 + \frac{3z}{5} + z \mid \cdot 20$$

$$45z = 520 \cdot 20 + 12z + 20z$$

$$13z = 520 \cdot 20$$

$$z = 40 \cdot 20 \Rightarrow z = \mathbf{800 \text{ тыс.рублей}}$$
 (вложил Святослав)

$$\text{Тогда: } y = \frac{3 \cdot 800}{5} \Rightarrow y = \mathbf{480 \text{ тыс.рублей}}$$
 (вложил Тимофей)

$$x = \frac{3 \cdot 800}{4} \Rightarrow x = \mathbf{600 \text{ тыс.рублей}}$$
 (вложил Алексей)

Ответ: 800 тысяч рублей, 600 тысяч рублей, 480 тысяч рублей.

Критерии оценивания

<i>Баллы</i>	<i>Правильность (ошибочность) решения</i>
20	Полное верное решение.
19	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
15	Решение содержит незначительные арифметические ошибки, возникшие при решении полученной системы уравнений
10	Ход решения задачи верный. Правильно составлена система, выражающая условие задачи
5	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца.
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует. Есть правильный ответ без решения.

Условие задачи 9.4. Пусть $x = 2025$. Найти значение выражения

$$\sqrt{x + 26\sqrt{x - 169}} - \sqrt{x - 26\sqrt{x - 169}}$$

Решение.

$$\text{Пусть } y = \sqrt{x - 169}, y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x - 169 \Rightarrow x = y^2 + 169$$

$$\text{Так как } x = 2025, \text{ то } y^2 = 2025 - 169 \Rightarrow y^2 = 1856 \ (y > 40)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 26y} - \sqrt{x - 26y} &= \left[x = y^2 + 169 \right] = \sqrt{y^2 + 169 + 26y} - \sqrt{y^2 + 169 - 26y} = \\ &= \sqrt{(y + 13)^2} - \sqrt{(y - 13)^2} = \left| \underset{>0}{y + 13} \right| - \left| \underset{>0}{y - 13} \right| = y + 13 - y + 13 = 26 \end{aligned}$$

Ответ: 26.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное верное решение.
18	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
15	Решение содержит арифметические ошибки, возникшие при неправильном раскрытии модулей.
10	Ход решения задачи верный. Выделены полные квадраты в подкоренных выражениях и извлечены корни.
5	Правильно сделаны начальные шаги, выполнена замена переменной $y = \sqrt{x - 169}$
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует. Есть правильный ответ без решения.

Условие задачи 9.5.

Дан $\triangle MKN$ такой, что $\angle N = 90^\circ$, $KN > MN$. Вокруг $\triangle MKN$ описана окружность, причем точка E – середина дуги MK , содержащей точку N . На стороне KN взяли точку T такую, что отрезки KT и MN равны. Найти угол $\angle TEN$.

Решение.

1. Дуга KE равна дуге $ME \Rightarrow KE = ME$.
2. $\angle EKN = \angle EMN = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на дугу EN).

10 класс

10.1. Если сложить два двузначных числа, разделить большее на меньшее, вычесть из большего меньшее, а затем полученные числа сложить, то получится 111. Найдите эти числа.

Решение.

$$a + b + \frac{a}{b} + a - b = 111$$

$$2a + \frac{a}{b} = 111$$

$$\frac{a}{b}(2b + 1) = 37 \cdot 3$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 3 \\ 2b + 1 = 37 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 37 \\ 2b + 1 = 3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 1 \\ 2b + 1 = 111 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 111 \\ 2b + 1 = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a = 54 \\ b = 18 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = 37 \\ b = 1 - \text{однозначное число} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = 55 \\ b = 55 \end{array} \right. \text{ числа равны} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 111 \\ 2b = 0 \end{array} \right. \text{ запрещенная операция} \end{array} \right.$$

Ответ : $\begin{cases} a = 54 \\ b = 18 \end{cases}$

20	Правильное обоснованное решение
18	Правильное обоснованное решение, но не отброшены посторонние корни
10	Уравнение составлено, но решение найдено в результате подбора. При подборе не определены границы возможных значений
2	Решение не найдено, но уравнение составлено или приведен ответ без обоснования
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

10.2. Число $\underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{222\dots2}_{2025}$ равно произведению двух последовательных натуральных чисел x и $(x+1)$. Найдите x .

Ответ: $x = \underbrace{333\dots3}_{2025}$

Решение

$$\begin{aligned}\underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{222\dots2}_{2025} &= \underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{1000\dots0}_{2025} + \underbrace{222\dots2}_{2025} = \underbrace{111\dots1}_{2025} \cdot 10^{2025} + 2 \cdot \underbrace{111\dots1}_{2025} = \left| A = \underbrace{111\dots1}_{2025} \right| = \\ &= A \cdot 10^{2025} + 2A = A \cdot (10^{2025} - 1 + 1) + 2A = A \cdot \left(\underbrace{999\dots9}_{2025} + 1 \right) + 2A = \\ &= A \cdot (9A + 1) + 2A = 9A^2 + 3A = A(9A + 3) = 3A(3A + 1) = |x = 3A| = \\ &= x(x+1) \\ x = 3A &= 3 \cdot \underbrace{111\dots1}_{2025} = \underbrace{333\dots3}_{2025}\end{aligned}$$

Критерии оценивания

20	Правильное обоснованное решение
15	Решение найдено, но нет обоснования закономерности, что если для чисел выполняются соотношения: $12=3 \times 4$, для $1122=33 \times 34$, то это будет выполняться для числа $\underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{222\dots2}_{2025}$.
2	Есть продвижение
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют

10.3. Решите уравнение $[2x] - [x] = 5$, где $[x]$ – целая часть числа x .

$[x]$ - целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Ответ: $x \in [4,5; 5,5)$

Решение

Целой частью числа $[x]$ называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Пусть $[x] = n$, где $n \in \mathbb{Z}$, то

$$[2x] - n = 5 \quad [2x] = 5 + n$$

$$\begin{cases} n+5 \leq 2x < n+5+1 \\ n \leq x < n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{n+5}{2} \leq x < \frac{n+6}{2} \\ n \leq x < n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} n < \frac{n+6}{2} \\ n+1 > \frac{n+5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n < n+6 \\ 2n+2 > n+5 \end{cases} \quad \begin{cases} n < 6 \\ n > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 4 \\ n = 5 \end{cases}$$

1) Если $n=4$, то $\begin{cases} 4,5 \leq x < 5 \\ 4 \leq x < 5,5 \end{cases} \quad 4,5 \leq x < 5$

2) Если $n=5$, то $\begin{cases} 5 \leq x < 5,5 \\ 5 \leq x < 6 \end{cases} \quad 5 \leq x < 5,5$

$$\begin{cases} 4,5 \leq x < 5 \\ 5 \leq x < 5,5 \end{cases} \quad 4,5 \leq x < 5,5$$

Критерии оценивания

20	Полностью правильное обоснованное решение
18	Ошибка в ответе на границе промежутка: $4,5 < x < 5,5$ или $4,5 \leq x \leq 5,5$
10	Найдено решение только для промежутка $5 \leq x < 5,5$ или только для $4,5 \leq x \leq 5$
10	Получено решение методом подбора
2	Есть продвижение. Найден ответ $x=5$

10.4. Фирма "Рога и Копыта" открылась в понедельник, выпустив акции и обещая своим вкладчикам фантастические дивиденды. Стоимость одной акции каждый день возрастает в два раза. В понедельник, в первый день продажи акций, старуха Шапокляк, отстояв многочасовую очередь, вложила в фирму 200 тысяч рублей из своей пенсии, надеясь к концу недели получить 12 млн 600 тыс. рублей чистой прибыли. Найдите вероятность получения старухой Шапокляк этой суммы, если вероятность того, что лавочка не закроется, в день открытия составляла $1/10$ и каждый день уменьшается в 10 раз?

Ответ: 10^{-28}

Решение. Для того, чтобы в воскресенье старуха Шапокляк получила 12 млн.600 тыс. рублей чистой прибыли необходимо, чтобы фирма «Рога и копыта» не закрылась до воскресенья включительно. В понедельник эта вероятность равна $1/10$, во вторник – $1/100$, в среду $1/1000$, ..., в воскресенье – $1/10^7$.

Обозначим A_i – событие, состоящее в том, что в i -ый день недели фирма не закроется.

Вероятность указанного события найдем с помощью теоремы умножения для независимых событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}(A_7)$$

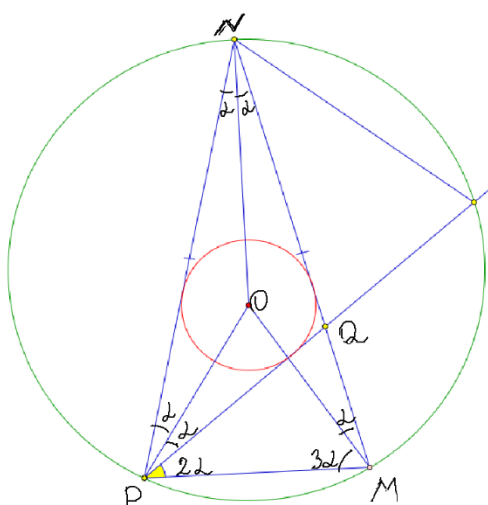
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{10^5} \cdot \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10^{28}}$$

Критерии оценивания

20	Полностью правильное обоснованное решение
10	Найдены вероятности событий, что фирма не закроется в каждый день недели.
2	Записан только ответ без объяснения
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют

10.5. Дан треугольник MNP , в котором проведена биссектриса PQ . Оказалось, что центр окружности, описанной около треугольника MNP совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник NPQ . Требуется найти углы треугольника.

Ответ: $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$



Решение. Пусть O – общий центр вписанной и описанной окружностей. Из условия следует, что NO и PO – биссектрисы углов MNP и NPQ и, кроме того, $MO=NO=PO$. Поэтому если $\angle MNO = \alpha$, то

$$\angle OMN = \alpha,$$

$$\angle OPN = \angle ONP = \alpha,$$

$$\angle NPQ = 2\alpha$$

(PQ – биссектриса). Отсюда

$\angle OMP = \angle OPM = 3\alpha$. Таким образом, сумма углов треугольника MNP равна 10α , откуда

$$\alpha = 18^\circ.$$

Критерии оценивания

20	Полностью правильное обоснованное решение
10	Правильно определены соотношения углов
2	Есть продвижение
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют

11 класс

11.1. Даны три раствора кислоты разной концентрации. Из них составляют три смеси.

Первая смесь – из равных объёмов второго и третьего растворов.

Вторая смесь – из равных объёмов первого и третьего растворов.

Третья смесь – из равных объёмов первого и второго растворов.

Концентрации этих смесей находятся в отношении 7:6:3.

Определить, во сколько раз концентрация третьего раствора больше концентрации второго раствора.

Решение.

Пусть x – концентрация первого раствора, y – концентрация второго раствора, z – концентрация третьего раствора, и пусть для составления смесей взяты объёмы – 1 л.

	Объём раствора, л	концентрация	Объём чистого вещества, л
1 раствор	1	x	$\frac{x}{100}$
2 раствор	1	y	$\frac{y}{100}$
3 раствор	1	z	$\frac{z}{100}$
1 смесь	2	$(\frac{y}{100} + \frac{z}{100}) : 2 = \frac{y+z}{200}$	$\frac{y}{100} + \frac{z}{100}$
2 смесь	2	$(\frac{x}{100} + \frac{z}{100}) : 2 = \frac{x+z}{200}$	$\frac{x}{100} + \frac{z}{100}$
3 смесь	2	$(\frac{y}{100} + \frac{x}{100}) : 2 = \frac{y+x}{200}$	$\frac{y}{100} + \frac{x}{100}$

Тогда по условию $\frac{y+z}{200} : \frac{x+z}{200} : \frac{x+y}{200} = 7:6:3$. Отсюда

$$\begin{cases} 6(y+z)=7(x+z) \\ 3(y+z)=7(x+y) \end{cases}, \begin{cases} 7x-6y+z=0 \\ 7x+4y-3z=0 \end{cases}. \text{ Вычтем из второго первое уравнение,}$$

получим $10y = 4z$, т.е. $\frac{z}{y} = 2,5$.

Ответ. 2,5

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. Решение проведено для частного случая.

10 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.2. В треугольнике $tgA:tgB:tgC=1:2:3$. Найдите косинусы этих углов. В ответе укажите значение выражения:

$$4\sqrt{2}\cos A - 20\sqrt{5}\cos B + 18\sqrt{10}\cos C.$$

Решение.

Т.к. заданы углы треугольника, то $A + B + C = \pi$.

Следовательно, $A + B = \pi - C$.

Возьмем от обеих частей тангенс

$$tg(A + B) = tg(\pi - C).$$

С одной стороны, по формулам приведения

$$tg(\pi - C) = -tgC.$$

С другой стороны

$$tg(A + B) = \frac{tgA + tgB}{1 - tgA \cdot tgB} = -tgC$$

Тогда

$$\frac{tgA + tgB}{1 - tgA \cdot tgB} = -tgC.$$

$$tgA + tgB = -tgC + tgA \cdot tgB \cdot tgC,$$

$$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC. \quad (1)$$

По условию,

$$tgA : tgB = 1 : 2,$$

$$tgB = 2tgA, \quad (2)$$

$$tgA : tgC = 1 : 3,$$

$$tgC = 3tgA. \quad (3)$$

Пусть $tgA = t$.

Тогда, учитывая замену, и подставляя (2) и (3) в (1), получим $t + 2t + 3t = 6t^3$, или $t^3 - t = 0$, т.е. $t = 0$ или $t = \pm 1$.

Возвращаемся к прежней переменной

$$tgA = 0 \quad \text{или} \quad tgA = 1 \quad \text{или} \quad tgA = -1.$$

$$A = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad A = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad A = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Т.к. A – угол треугольника, то $A = \frac{\pi}{4}$ или $A = \frac{3\pi}{4}$.

Если $A = \frac{\pi}{4}$, то $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tgB = 2tgA = 2$, $\cos B = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 B}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$, замечаем, что $\cos B = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 B}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, учитывая знак тангенса.

Аналогично, $tgC = 3tgA = 3$ и $\cos C = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 C}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Случай $A = \frac{3\pi}{4}$ невозможен, т.к. если $\operatorname{tg} A = -1$, то $\operatorname{tg} B = 2\operatorname{tg} A = -2$, т.е. угол B – тупой, а в треугольнике не может быть более одного тупого угла.

Таким образом, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos C = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$$4\sqrt{2}\cos A - 20\sqrt{5}\cos B + 18\sqrt{10}\cos C = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 20\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + 18\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = 2$$

Ответ. 2

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. Рассмотрен частный случай либо решение проведено подбором возможных вариантов.

10 б. Решение содержит существенное продвижение, но не рассмотрены все возможные случаи.

10 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.3. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 1:3, считая от вершины. Во сколько раз площадь исходного треугольника больше площади треугольника с вершинами в этих точках.

Решение.

Пусть ABC – данный треугольник, AA_1 , BB_1 , CC_1 его медианы и O – точка пересечения медиан. По свойству медиан $AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$ и, следовательно

$$AO = \frac{2}{3}AA_1, BO = \frac{2}{3}BB_1, CO = \frac{2}{3}CC_1. \quad (1)$$

И пусть $M \in AA_1$, $N \in BB_1$, $K \in CC_1$, тогда по условию

$$AM : MA_1 = BN : NB_1 = CK : KC_1 = 1 : 3.$$

$$AM = \frac{1}{4} AA_1, BN = \frac{1}{4} BB_1, CK = \frac{1}{4} CC_1. \quad (2)$$

Из (1) и (2) $AM : AO = BN : BO = CK : CO = 3 : 8.$

Следовательно, $MO : AO = NO : BO = KO : CO = 5 : 8.$

Таким образом, треугольники ABC и MNK – подобны. Площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} = \frac{256}{100} = 2,56.$$

Ответ. 2,56

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. В работе присутствует обоснование, что треугольники подобны, однако правильный ответ не обоснован.

10 б. Решение содержит существенное продвижение, которое может привести к верному ответу, но не доведено до конца. (Например, найдено отношение $AM : AO = BN : BO = CK : CO = 3 : 8.$)

15 б. Решение содержит существенное продвижение, которое может привести к верному ответу, но не доведено до конца. (Например, найдено отношение $MO : AO = NO : BO = KO : CO = 5 : 8.$)

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.4. Найдите все простые числа p, q, r , являющиеся решением уравнения $2^{p+1} + q^2 = r^2$. Вычислите величину $F = 2q - 3p + 4r$. Если задача имеет несколько ответов для p, q, r , то укажите среднее значение F .

Решение.

Заметим, что числа q, r должны иметь одинаковую четность. Т.к. они простые, то они нечетные.

Перепишем условие в виде $2^{p+1} = r^2 - q^2 = (r - q)(r + q)$.

Тогда $r - q = 2^m$, $r + q = 2^n$, $1 \leq m < n$ и $m + n = p + 1$.

Складывая равенства, получим $2r = 2^m + 2^n$, $r = 2^{m-1} + 2^{n-1}$.

Т.к. r – нечетное число, то $m=1$. Значит $r - q = 2$, $r + q = 2^p$.

Решая полученную систему, получим

$$r = 2^{p-1} + 1, \quad q = 2^{p-1} - 1.$$

Если $p=2$, то $q=1$, но 1 – не является простым числом. Следовательно, p – нечетное простое число. Поэтому $p - 1 = 2k$, $q = (2^k + 1)(2^k - 1)$.

Так как q – простое, то $k=1$. Следовательно, $q=3$, $r=5$, $p=3$. При этом это единственное решение. Следовательно, среднее значение F совпадает с F .

Тогда $F = 2q - 3p + 4r = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 17$.

Ответ. 17

Критерии

- 0 б. Приведен только ответ.
- 2 б. В работе присутствует наблюдение, что числа q, r нечетные, но дальнейших продвижений нет либо они неверны.
- 5 б. Ответ содержит лишь пример, само решение проведено подбором возможных вариантов.
- 10 б. Решение содержит существенное продвижение, но не рассмотрены все возможные случаи.
- 10 б. Решение содержит существенное продвижение, но не обоснована единственность решения.
- 10 б. Верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.
- 15 б. Верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.
- 20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.5. На одной из двух параллельных прямых отмечено 8 точек, а на другой 11. Найдите A – число треугольников с вершинами в этих точках, B – число выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

В ответе укажите разность $B - A$.

Решение.

Для построения треугольников надо выбирать 2 точки на одной прямой и одну на другой, следовательно $A = 8 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_8^2 = 748$.

Для четырехугольников две вершины на одной и две вершины на другой прямой, т.е. $B = C_{11}^2 C_8^2 = 55 \cdot 28 = 1540$.

$$B - A = 1540 - 748 = 792.$$

Ответ. 792

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. Допущены ошибки в преобразованиях или формулах при нахождении числа A либо числа B , однако число A либо B найдено верно, далее получен неверный ответ.

10 б. Верно найдено только A – число треугольников с вершинами в заданных точках.

10 б. Верно найдено только B – число выпуклых четырехугольников с вершинами в заданных точках.

10 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.