

Северо-Кавказский федеральный университет
Факультет математики и компьютерных наук
имени профессора Н.И. Червякова
Задания второго тура Открытой олимпиады СКФУ
«45 параллель» по математике
5-6 классы

5-6.1. На планете «Зумзам» живут карлики и великаны. Карлики всегда лгут, а великаны всегда говорят правду. Несколько жителей планеты собрались поиграть в нарды. Желая присоединиться к игре, путешественник опросил всех участников. Часть игроков уверены, что все великаны разбиваются на пары — их количество чётно. Другие утверждают, что одному из карликов нужна пара: их количество нечётно. Никаких иных ответов путешественник не получил. Сможет ли он найти себе пару для партии?

5-6.2. Виолетта, Никита, Дарина и Андрей участвовали в олимпиаде 45 параллель. Каждую задачу решили ровно трое из них. Дарина решила больше всех — 8 задач, Андрей решил меньше всех — 4 задачи, а Виолетта и Никита решили одинаковое число задач. Сколько всего задач было в олимпиаде?

5-6.3. На уроке математики Алиса записала дату на полях и обнаружила, что в этой дате по два раза использованы цифры «0», «2» и «6». Какая эта может быть дата, если Алиса сейчас учится в 7 классе, а в первый класс она пошла в сентябре 2019. (Алиса каждый год переходила в следующий класс, на второй год не оставалась) Когда наступит ближайшая, следующая после найденной, для записи которой используются три различные цифры, причем каждая — ровно по 2 раза? Считаем, что дата записывается в формате ДД.ММ.ГГ, а если число меньше 10, то к нему слева приписываем «0», например, 01.02.24. В ответе запишите ближайшую дату.

5-6.4. Ольга Ивановна и пятеро ее детей выбирают пиццу.

Настя: Мне вегетарианскую и без грибов.

Милана: Любую, только не вегетарианскую.

Альмира: А я хочу вегетарианскую, но без перца!

Наташа: И я без перца. Зато с грибами!

Румилия: А мне с перцем хочется.

Мама: С такими разными вкусами одной пиццы точно мало...

Удастся ли маме заказать две пиццы так, чтобы угодить всем детям, или без третьей не обойтись?

5-6.5. В шестизначном числе первую и последнюю цифру заменили звёздочками: *2026*. Известно, что число делится на 72. Восстановите число.

5-6 класс Ответы

1. На планете «Зумзам» живут карлики и великаны. Карлики всегда лгут, а великаны всегда говорят правду. Несколько жителей планеты собрались поиграть в нарды. Желая присоединиться к игре, путешественник опросил всех участников. Часть игроков уверены, что все великаны разбиваются на пары — их количество чётно. Другие утверждают, что одному из карликов нужна пара: их количество нечётно. Никаких иных ответов путешественник не получил. Сможет ли он найти себе пару для партии?

Ответ: Не сможет

2. Виолетта, Никита, Дарина и Андрей участвовали в олимпиаде 45 параллель. Каждую задачу решили ровно трое из них. Дарина решила больше всех — 8 задач, Андрей решил меньше всех — 4 задачи, а Виолетта и Никита решили одинаковое число задач. Сколько всего задач было в олимпиаде?

Ответ: 8

3. На уроке математики Алиса записала дату на полях и обнаружила, что в этой дате по два раза использованы цифры «0», «2» и «6». Какая эта может быть дата, если Алиса сейчас учится в 7 классе, а в первый класс она пошла в сентябре 2019. (Алиса каждый год переходила в следующий класс, на второй год не оставалась) Когда наступит ближайшая, следующая после .дата после найденной, для записи которой используются три различные цифры, причем каждая – ровно по 2 раза? Считаем, что дата записывается в формате ДД.ММ.ГГ, а если число меньше 10, то к нему слева приписываем «0», например, 01.02.24. В ответе запишите ближайшую дату.

Ответ: 07.02.27

4. Ольга Ивановна и пятеро ее детей выбирают пиццу.

Настя: Мне вегетарианскую и без грибов.

Милана: Любую, только не вегетарианскую.

Альмира: А я хочу вегетарианскую, но без перца!

Наташа: И я без перца. Зато с грибами!

Румилия: А мне с перцем хочется.

Мама: С такими разными вкусами одной пиццы точно мало...

Удастся ли маме заказать две пиццы так, чтобы угодить всем детям, или без третьей не обойтись?

Ответ: Нет

5. В шестизначном числе первую и последнюю цифру заменили звёздочками: *2026*. Известно, что число делится на 72. Восстановите число.

Ответ: 420264

Северо-Кавказский федеральный университет
Факультет математики и компьютерных наук
имени профессора Н.И. Червякова
Задания второго тура Открытой олимпиады СКФУ
«45 параллель» по математике
7-8 классы

7-8.1. Сколько раз до полудня угол между часовой и минутной стрелками составляет 90° ?

7-8. 2. Вычислите:

$$\frac{2025^{2027} \cdot 2026^{2024} + 2026^{2024}(2^4 \cdot 5^3 + 5^2)^{2027}}{2026^{2025} \cdot 2025^{2026} - 1013 \cdot 2026^{2023} \cdot 25^{2026} \cdot 2 \cdot 81^{2026}}$$

7-8.3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5} \\ \frac{zx}{z+x} = \frac{24}{7} \end{cases}$$

7-8.4. Вдоль окружности нарисованы фигуры различного типа: квадраты, треугольники, круги и ромбы, всего 40 фигур. Каждая фигура обладает числовой характеристикой (например, площадью или периметром).

Известно, что для любых четырех рядом стоящих фигур выполняется условие: одна из них имеет характеристику большую, чем суммарная характеристика трех оставшихся.

Необходимо определить минимальное возможное общее значение характеристик всех 40 фигур.

7-8.5. В таблице 10×10 по порядку расставлены числа от 0 до 99 (в первой строке – от 0 до 9, во второй – от 10 до 19 и т.д.). Затем перед каждым из чисел поставлен знак "+" или "-" так, что в каждой строке и каждом столбце оказалось по пять знаков "+" и пять знаков "-".

Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы с учетом расставленных знаков?

Северо-Кавказский федеральный университет
Факультет математики и компьютерных наук
имени профессора Н.И. Червякова
Задания второго тура Открытой олимпиады СКФУ
«45 параллель» по математике
7-8 классы

7-8.1. Сколько раз до полудня угол между часовой и минутной стрелками составляет 90° ?

Ответ: 22

7-8.2. Вычислите:

$$\frac{2025^{2027} \cdot 2026^{2024} + 2026^{2024}(2^4 \cdot 5^3 + 5^2)^{2027}}{2026^{2025} \cdot 2025^{2026} - 1013 \cdot 2026^{2023} \cdot 25^{2026} \cdot 2 \cdot 81^{2026}}$$

Ответ: 2

7-8.3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5} \\ \frac{zx}{z+x} = \frac{24}{7} \end{cases}$$

Ответ: $x = 8, y = 4, z = 6$

7-8.4. Вдоль окружности нарисованы фигуры различного типа: квадраты, треугольники, круги и ромбы, всего 40 фигур. Каждая фигура обладает числовой характеристикой (например, площадью или периметром).

Известно, что для любых четырех рядом стоящих фигур выполняется условие: одна из них имеет характеристику большую, чем суммарная характеристика трех оставшихся.

Необходимо определить минимальное возможное общее значение характеристик всех 40 фигур.

Ответ: 70

7-8.5. В таблице 10×10 по порядку расставлены числа от 0 до 99 (в первой строке – от 0 до 9, во второй – от 10 до 19 и т.д.). Затем перед каждым из чисел поставлен знак "+" или "-" так, что в каждой строке и каждом столбце оказалось по пять знаков "+" и пять знаков "-".

Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы с учетом расставленных знаков?

Ответ: 0

**Факультет математики и компьютерных наук
имени профессора Н.И. Червякова
Задания второго тура Открытой олимпиады СКФУ
«45 параллель» по математике**

9 класс

9.1. Докажите, что: $\frac{171\,717}{252\,525} = \frac{1717}{2525} = \frac{17}{25}$.

9.2. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308, \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92. \end{cases}$$

9.3. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнений $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ простыми числами.

9.4. Найдите все прямоугольные треугольники, длины сторон которых являются целыми числами, а периметр каждого из них численно равен площади.

9.5. Пусть O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, M – середина стороны AD . Пусть K и N – точки пересечения отрезков BM и AC , а также CM и BD . Докажите, что разность $KM - KO$ равна радиусу окружности, вписанной в четырехугольник $MKON$.

**Северо-Кавказский федеральный университет
Факультет математики и компьютерных наук
имени профессора Н.И. Червякова
Задания второго тура Открытой олимпиады СКФУ
«45 параллель» по математике**

10 класс

10.1. На доске написаны 5 чисел. Могло ли оказаться так, чтобы сумма любых двух подряд идущих чисел – отрицательна, а сумма всех пяти чисел – положительна?

10.2. Найти все решения уравнения $x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y + 1 = 0$.

10.3. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению: $|4x| + |6y| + |24 - 4x - 6y| = 24$.

10.4. Найдите значение выражения

$$\frac{(16!+15!) \cdot (15!+14!) \cdot \dots \cdot (3!+2!) \cdot (2!+1!)}{(16!-15!) \cdot (15!-14!) \cdot \dots \cdot (3!-2!) \cdot (2!-1!)},$$

(где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$).

10.5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD и BE пересекаются в точке H . Окружность, описанная около треугольника ABH , пересекает сторону AC в точке F , а сторону BC в точке G . Найдите FG , если $DE = 25$ см.

**Северо-Кавказский федеральный университет
Факультет математики и компьютерных наук
имени профессора Н.И. Червякова
Задания второго тура Открытой олимпиады СКФУ
«45 параллель» по математике**

11 класс

11.1. Уравнения $x^2+bx+a=0$ и $x^2+cx+a=1$ имеют по два целых корня, причем каждый из корней меньше (-1) . При каком наименьшем значении a это возможно?

11.2. Про натуральные числа a и b известно, что a^a делится на b^b , но число a не делится на b . Причем число b взаимно просто с 210. Найдите наименьшее возможное значение числа $(a+b)$.

11.3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, L – точка касания окружности и боковой стороны CD . Известно, что $CL : LD = 1 : 4$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 9, CD = 30$.

11.4. У Вити и Маши 300 фишек. Они играют в следующую игру: Витя кладёт в мешочек несколько фишек (возможно, все), а Маша выбирает, кому этот мешочек достанется; затем это действие повторяется ещё несколько раз. Игра заканчивается, когда либо закончились все фишки, либо кому-нибудь досталось 11 мешочков — в этом случае все остальные фишки сразу же достаются другому игроку. Какое наибольшее количество фишек может гарантированно получить Витя?

11.5. Известно, что число $x=2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-2026}$. Найдите значение выражения $\sqrt{2x + 4\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{2x - 4\sqrt{2x - 4}}$.

Решения 9 класс

9.1. Докажите, что: $\frac{171\,717}{252\,525} = \frac{1717}{2525} = \frac{17}{25}$.

Решение.

$$\frac{171\,717}{252\,525} = \frac{17 \cdot 10^4 + 17 \cdot 10^2 + 17}{25 \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^2 + 25} = \frac{17(10^4 + 10^2 + 1)}{25(10^4 + 10^2 + 1)} = \frac{17}{25};$$

$$\frac{1717}{2525} = \frac{17 \cdot 100 + 17}{25 \cdot 100 + 25} = \frac{17 \cdot 101}{25 \cdot 101} = \frac{17}{25}.$$

Следовательно, $\frac{171\,717}{252\,525} = \frac{1717}{2525} = \frac{17}{25}$.

9.2. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308, \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92. \end{cases}$$

Решение.

Сложив уравнения системы, после сокращения на 4 получим уравнение

$$x^2 + 9y^2 + 6xy = 100,$$

Откуда, поскольку $x \in N, y \in N$, имеем:

$$x+3y=10$$

После вычитания второго уравнения из первого, получим:

$$4y^2 + z^2 + 4yz = 36,$$

откуда $2y+z=6$.

Решениями этого уравнения (в натуральных числах) являются пары (1, 4) и (2, 2). При $y=1$ и при $y=2$ из уравнения $x+3y=10$ получим соответственно $x=7$ и $x=4$.

Таким образом, решением системы являются две тройки натуральных чисел (7, 1, 4) и (4, 2, 2).

О т в е т: $\{(7, 1, 4), (4, 2, 2)\}$.

9.3. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнений $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ простыми числами.

Решение.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -(2a + 9)$, $x_1 \cdot x_2 = 3b + 5$. Так как число $3b + 5$ - простое, то возможны два случая

1) $x_1 = 3b + 5$, $x_2 = 1$;

2) $x_1 = -(3b + 5)$, $x_2 = -1$.

В первом случае $x_1 + x_2 = 3b + 6$, отсюда $3b + 6 = -2a - 9$, или $3(b + 5) = -2a$. Следовательно, $a = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $2a + 9 = 6k + 9 = 3(2k + 3)$, т.е. коэффициент $2a + 9$ делится на 3. С другой стороны по условию $2a + 9$ - простое число. Поэтому $2a + 9 = 3$, откуда $a = -3$. А, следовательно, из условия $3(b + 5) = -2a$, получаем $b = -3$. Однако, тогда $3b + 5 = -4$ - не является простым числом.

Во втором случае $x_1 + x_2 = -3b - 6$ отсюда $3b + 6 = 2a + 9$, или $3(b - 1) = 2a$. Следовательно, $a = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $2a + 9 = 6k + 9 = 3(2k + 3)$, т.е. коэффициент $2a + 9$ делится на 3. Аналогично, $a = -3$. А, следовательно, из условия $3(b - 1) = 2a$, получаем $b = -1$. Тогда $3b + 5 = 2$ - простое число.

Таким образом, уравнение $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$ принимает вид $x^2 + 3x + 2 = 0$, которое имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

Ответ. $a = -3$, $b = -1$

9.4. Найдите все прямоугольные треугольники, длины сторон которых являются целыми числами, а периметр каждого из них численно равен площади.

Решение.

Пусть x , y - длины катетов треугольника, удовлетворяющего условию задачи. Тогда $xy = 2(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})$ или $-2\sqrt{x^2 + y^2} = 2(x + y) - xy$. После возведения в квадрат и последующих упрощений получаем:

$$(x - 4)y = 4x - 8 = 4(x - 4) + 8.$$

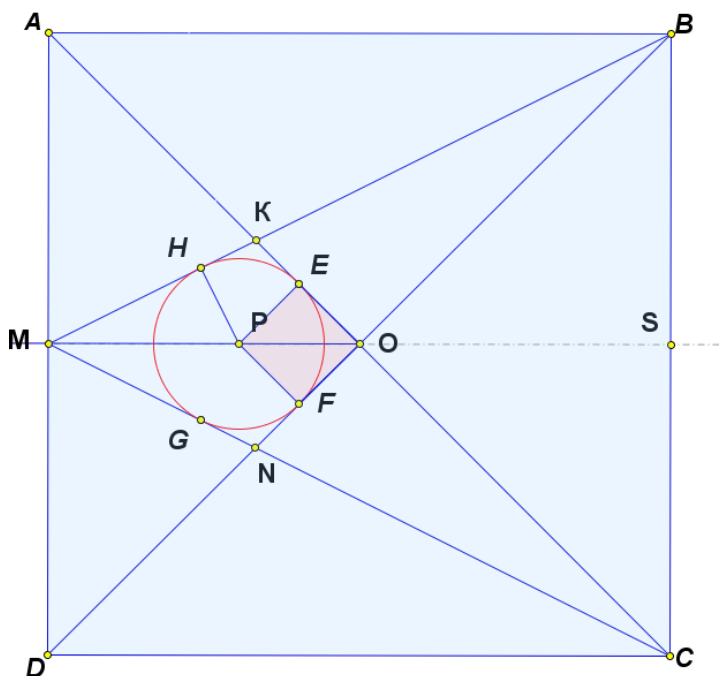
Из полученного равенства следует, что $4x - 8 = 4(x - 4) + 8$ делится на $x - 4$, а тогда и 8 делится на $x - 4$. Следовательно, $x - 4 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$, $x \in \{5, 6, 8, 12, 3, 2\}$.

Из этих значений x к решению задачи приводят только первые 4, причем двум из них соответствуют разные треугольники. Окончательно получаем, что условию задачи удовлетворяют только треугольники со сторонами 5, 12, 13 и 6, 8, 10.

9.5. Пусть O - точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, M - середина стороны AD . Пусть K и N - точки пересечения отрезков BM и AC , а также CM и BD . Докажите, что разность $KM - KO$ равна радиусу окружности, вписанной в четырехугольник $MKON$.

Решение.

Пусть P – центр данной окружности, r – ее радиус, и окружность касается сторон KO , ON , NM , MK в точках E , F , G , H соответственно. Тогда



четыреугольник $OFPE$ – квадрат (у него равны соседние пары сторон, и углы при вершинах O , E , F – прямые), значит, $OE = r$. Из равенства касательных, проведенных из точки K , следует, что $KM - KO = (KH + HM) - (KE + EO) = HM - EO = HM - r$. Пусть продолжение MO пересекает сторону BC в точке S . Тогда из подобия прямоугольных треугольников MPH и MBS следует, что $HM : HF = SM : SB = 2 : 1$. Значит, $HM = 2HP = 2r$, и тогда $KM - KO = HM - r = r$.

Решения для 10 класса

10.1. На доске написаны 5 чисел. Могло ли оказаться так, чтобы сумма любых двух подряд идущих чисел – отрицательна, а сумма всех пяти чисел – положительна?

Ответ: Может.

Решение.

Например: 3; -4; 3; -4; 3.

10.2. Найти все решения уравнения $x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y + 1 = 0$.

Ответ: (2; 1).

Решение.

$$x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y + 1 = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 2y + 1) = (x - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0.$$

Поскольку квадрат любого числа всегда неотрицателен, то имеем систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}, \text{отсюда} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

10.3. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению:
 $|4x| + |6y| + |24 - 4x - 6y| = 24$.

Ответ: 12.

Решение.

Уравнение равносильно системе неравенств $\begin{cases} 4x \geq 0 \\ 6y \geq 0 \\ 24 - 4x - 6y \geq 0 \end{cases}$. На

плоскости получим прямоугольный треугольник с катетами 6 и 4. Следовательно площадь фигуры 12.

10.4. Найдите значение выражения

$$\frac{(16!+15!) \cdot (15!+14!) \cdot \dots \cdot (3!+2!) \cdot (2!+1!)}{(16!-15!) \cdot (15!-14!) \cdot \dots \cdot (3!-2!) \cdot (2!-1!)},$$

(где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$).

Ответ. 136.

Решение.

Воспользуемся тождествами:

$$(k+1)! + k! = k!(k+1+1) = k!(k+2) \text{ и } (k+1)! - k! = k!(k+1-1) = k! \cdot k.$$

Тогда

$$\frac{(16!+15!) \cdot (15!+14!) \cdot \dots \cdot (3!+2!) \cdot (2!+1!)}{(16!-15!) \cdot (15!-14!) \cdot \dots \cdot (3!-2!) \cdot (2!-1!)} = \frac{15! \cdot 17 \cdot 14! \cdot 16 \cdot \dots \cdot 2! \cdot 4 \cdot 1! \cdot 3}{15! \cdot 15 \cdot 14! \cdot 14 \cdot \dots \cdot 2! \cdot 2 \cdot 1! \cdot 1} = \frac{17 \cdot 16}{2 \cdot 1} = 136.$$

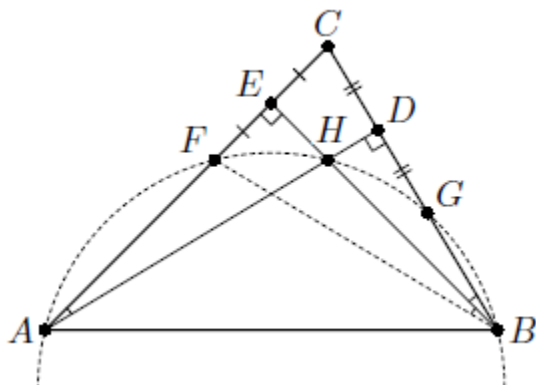
10.5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD и BE пересекаются в точке H . Окружность, описанная около треугольника ABH , пересекает сторону AC в точке F , а сторону BC в точке G . Найдите FG , если $DE = 25$ см.

Ответ 50 см.

Решение.

Пусть $\angle FAH = \angle HBF = \alpha$. Прямоугольные треугольники ADC и ECB имеют общий угол C , поэтому $\angle EBC = \alpha$. Таким образом, BE – высота и биссектриса треугольника FBC , следовательно, этот треугольник

равнобедренный и BE является его медианой, то есть $FE = EC$. Аналогично $CD = DG$. Значит, ED – средняя линия треугольника FCG . Поэтому $FG = 2DE$.



Решения для 11 класса

11.1. Уравнения $x^2+bx+a=0$ и $x^2+cx+a=1$ имеют по два целых корня, причем каждый из корней меньше (-1) . При каком наименьшем значении a это возможно?
Ответ: 15.

Решение: По теореме Виета произведение корней первого уравнения равно a , произведение корней второго уравнения равно $(a-1)$. Так как корни целые и меньше (-1) , их произведение больше 1, поэтому каждое из двух последовательных чисел $(a-1)$ и a является произведением двух различных чисел, больших 1. Первое нечетное число, не являющееся простым или квадратом простого, это 15. Получается, что $a-1=14$, $a=15$. Тогда корни первого уравнения -3 и -5 (при этом $b=8$), корни второго уравнения -2 и -7 (при этом $c=9$).

11.2. Про натуральные числа a и b известно, что a^a делится на b^b , но число a не делится на b . Причем число b взаимно просто с 210. Найдите наименьшее возможное значение числа $(a+b)$.

Ответ: 374.

Решение: Очевидно, что $b \neq 1$. Пусть p – простой делитель числа b ; тогда $p \geq 11$, так как b взаимно просто с $210=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поскольку a^a делится на b^b , которое делится на p , то и a делится на p . Отсюда следует, что b не является простым.

Докажем, что $a+b \geq 253+121=374$. Если b представляется в виде произведения хотя бы трех простых множителей (не обязательно различных), то оно не меньше $11^3 > 374$, тогда и $a+b > 374$. Пусть теперь b представимо в виде ровно двух простых множителей. Если $b=qr$ для различных простых чисел q и r , то a делится на b , что невозможно.

Осталось разобрать случай, когда $b=s^2$ для некоторого простого $s \geq 11$. Число a делится на s ; пусть $a=ks$ для некоторого натурального k . Число k взаимно просто с s , поскольку a не делится на b .

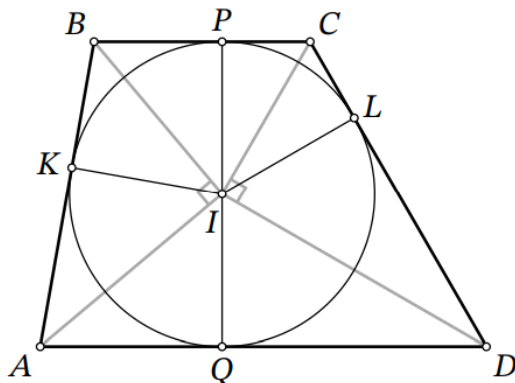
Так как $a^a=(sk)^{sk}=s^{sk} \cdot k^{sk}$ делится на $b^b=(s^2)^{s^2}=s^{2s^2}$, то s^{sk} делится на s^{2s^2} , то есть $sk \geq 2s^2$, и $k \geq 2s$. Число k взаимно просто с s , поэтому оно не равно $2s$, то есть $k \geq 2s+1$. Тогда $a+b=sk+s^2 \geq s(2s+1)+s^2 \geq 11 \cdot 23+11^2=253+121=374$.

Легко убедиться, что для $a=253=11 \cdot 23$ и $b=11^2$ все условия выполняются.

11.3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, L — точка касания окружности и боковой стороны CD . Известно, что $CL : LD = 1 : 4$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 9$, $CD = 30$.

Ответ: 972.

Решение. Отметим центр окружности I , а также точки касания P, Q, K со сторонами BC, AD, AB соответственно. Заметим, что $IP \perp BC, IQ \perp AD$, т. е. точки P, I, Q лежат на одной прямой, и PQ — высота данной трапеции, равная диаметру её вписанной окружности. Также равны отрезки касательных $AK=AQ, BK=BP, CP=CL, DL=DQ$.



Из условия следует, что $CP = CL = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6$, $DQ = DL = \frac{4}{5} \cdot 30 = 24$. Тогда $BK = BP = BC - CP = 9 - 6 = 3$. Поскольку прямые CI и DI являются биссектрисами углов C и D трапеции, имеем $\angle ICD + \angle IDC = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 180^\circ : 2 = 90^\circ$, т. е. треугольник CID — прямоугольный с прямым углом при вершине I . Так как IL является его высотой, опущенной на гипотенузу, $IL = \sqrt{CL \cdot DL} = 12$. Это радиус окружности.

Аналогично рассмотрев высоту IK в прямоугольном треугольнике AIB , получаем $12 = IK = \sqrt{AK \cdot BK}$.

Используя $BK = 3$, извлекаем $AK = AQ = 48$.

Итак, площадь трапеции равна $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{9 + (48 + 24)}{2} \cdot 24 = 972$.

11.4. У Вити и Маши 300 фишек. Они играют в следующую игру: Витя кладёт в мешочек несколько фишек (возможно, все), а Маша выбирает, кому этот мешочек достанется; затем это действие повторяется ещё несколько раз. Игра заканчивается, когда либо закончились все фишки, либо кому-нибудь досталось 11 мешочков — в этом случае все остальные фишки сразу же достаются другому игроку. Какое наибольшее количество фишек может гарантированно получить Витя?

Ответ: 146.

Решение. Сначала покажем, что Витя сможет получить хотя бы 146 фишек.

Его стратегия будет состоять в том, чтобы класть в мешочки по 14 фишек. Во-первых, заметим, что он всегда сможет это делать: так как $21 \cdot 14 = 294$, то он так сделает хотя бы 21 ход, и когда фишки начнут заканчиваться, процесс наверняка уже завершится (одному из игроков достанется 11 мешочков).

Разберём, как именно может завершиться игра. Если у Вити накопилось 11 мешочков, то это уже 154 фишек. В ином случае у Маши, наоборот, не более 11 мешочков, то есть не более 154 фишек. Значит, остальные фишки у Вити, то есть не менее 146.

Теперь покажем, как Маше гарантировать себе 154 фишки. Ее стратегия следующая: мешочки с 14 фишками и более забирать себе, а с 13 фишками и менее — отдавать Вите.

Аналогично разберём, как может закончиться игра. Если Маша закончит её с 11 мешочками, то у нее уже не менее 154 фишек. В ином случае Витя закончит с не более чем 11 мешочками, что составит не более $11 \cdot 13 = 143$ фишек. Тогда у Маши останется не менее 157 фишек.

Замечание. Укажем, как получить ответ в общем случае. Пусть всего фишек N , а мешочков каждому игроку может достаться не более k ($N \geq 2k$). Разобьём фишки на $2k$ почти равных групп, то есть чтобы либо во всех группах было поровну фишек (при $N:2k$), либо количества фишек в группах отличались не более чем на 1 (такое разбиение единственно). Группы упорядочим по возрастанию. Рассуждением, аналогичным приведённому выше, можно показать, что Витя может гарантировать себе сумму меньших групп разбиения, а Маша — сумму бóльших.

11.5. Известно, что число $x=2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-2026}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}}.$$

Ответ: 4

Решение: Отметим, что сумма геометрической прогрессии

$$x=2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-2026}=\frac{2(1-2^{-2028})}{1-\frac{1}{2}}=4-2^{-2026} \in (3;4).$$

Поэтому $\sqrt{2x-4} < 2$. Значит

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}} &= \sqrt{(\sqrt{2x-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-4}-2)^2}= \\ &= |\sqrt{2x-4}+2|+|\sqrt{2x-4}-2|=\sqrt{2x-4}+2+2-\sqrt{2x-4}=4, \end{aligned}$$

так как $\sqrt{2x-4}-2 < 0$.